0.1 Homology of commutative ring

Theorem 0.1.1

R : commutative ring に対し、 $s\mathbf{Alg}_R$ を R 上の simplicial commutative algebra の category とする。このとき、 $f : \text{Hom}_{s\mathbf{Alg}_R}(X, Y)$ に対し、

1. weak equivalence とは、 $f_* : \pi_*(X) \rightarrow \pi_*(Y)$ が isomorphism
2. fibration は $X_n \rightarrow Y_n$ ($n \geq 1$) が全射かつ、誘導される $X_0 \rightarrow \pi_0(X) \times_{\pi_0(Y)} Y_0$ が全射。
3. cofibration が acyclic fibration に対し RLP を持つ

と定義すれば、model structure となる。ただし、 $\pi_0(X) = X/\text{Im}(d_0 - d_1)$

Corollary 0.1.2

$S_R : s\mathbf{Mod}_R \iff s\mathbf{Alg}_R$: forgetful は Quillen functor

Example 0.1.3

R : commutative ring としたとき、 $(\mathbf{Alg}_R)_{ab} = *$ 。ただし、 $*$ は terminal object

Definition 0.1.4

R : commutative ring とし、 $A \in \mathbf{Alg}_R$ 、 $M \in \mathbf{Mod}_A$ としたとき、 $A \times M \in \mathbf{Alg}_R \downarrow A$ を次のように定義する。まず、集合としては $A \times M = A \oplus M$ であり、それぞれ演算は

$$(a, x) + (b, y) = (a + b, x + y)$$

$$(a, x)(b, y) = (ab, ay + bx)$$

$$r(a, x) = (ra, rx)$$

で定義し、 $A \times M \rightarrow A$ は projection で定義する。

Definition 0.1.5

R : commutative ring、 $X : R\text{-Algebra}$ 、 $M : X\text{-module}$ としたとき、

$$f : X \rightarrow M$$

を R -module 間の map とする。これはつまり、 X を R -module とみなし、 M は、

$$R \times X \xrightarrow{\mu} X, \quad X \times M \xrightarrow{\mu'} M$$

という2つの action から、

$$R \times M \xrightarrow{j \times 1} (R \times X) \times M \xrightarrow{\mu \times 1} X \times M \xrightarrow{\mu'} M$$

により、 M を R -module と見なせばよい。ただし、 $j: R \rightarrow R \times X$ は $j(r) = (r, 1)$ により定義する。このとき、 f が Leibniz rule を満たすとは、任意の $x, y \in X$ に対し、

$$f(xy) = f(x)y + xf(y)$$

が成り立つことである。このとき、

$$\mathbf{Der}_R(X; M) = \{f \in \mathbf{Hom}_{\mathbf{Mod}_R}(X, M) \mid \text{satisfy the Leibniz rule}\}$$

と定義し、 X の R -linear derivation with coefficients in M と呼ぶ。

Lemma 0.1.6

$\mathbf{Der}_R(X; M)$ は $\mathbf{Hom}_{\mathbf{Mod}_R}(X, M)$ の sub module である。

proof) $f, g \in \mathbf{Der}_R(X; M)$ に対し、

$$\begin{aligned} f + g(xy) &= f(xy) + g(xy) \\ &= f(x)y + xf(y) + g(x)y + xg(y) \\ &= (f(x) + g(x))y + x(f(y) + g(y)) \\ &= (f + g)(x)y + x(f + g)(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} rf(xy) &= r \cdot f(xy) \\ &= r(f(x)y + xf(y)) \\ &= rf(x)y + rxf(y) \\ &= rf(x)y + xrf(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{-1}(xy) &= f(xy)^{-1} \\ &= (f(x)y + xf(y))^{-1} \\ &= f(x)^{-1}y + xf(y)^{-1} \\ &= f^{-1}(x)y + xf^{-1}(y) \end{aligned}$$

ただし、 $(f(x)y + xf(y)) + (f(x)^{-1}y + xf(y)^{-1}) = 0$ なので、

$$(f(x)y + xf(y))^{-1} = f(x)^{-1}y + xf(y)^{-1}$$

である。つまり、 $f + g, f^{-1}, rf \in \mathbf{Der}_R(X; M)$

Theorem 0.1.7

$A \in \mathbf{Alg}_R$ 、 $M \in \mathbf{Mod}_A$ 、 $X \in \mathbf{Alg}_R \downarrow A$ に対し、

$$pr_2 : \mathbf{Hom}_{\mathbf{Alg}_R \downarrow A}(X, A \times M) \longrightarrow \mathbf{Der}_R(X; M)$$

を、 $f = \varepsilon \oplus \partial \mapsto \partial$ により定義するれば、これは同型である。

proof) まず well defined から示す。 $f = \varepsilon \oplus \partial \in \mathbf{Hom}_{\mathbf{Alg}_R \downarrow A}(X, A \times M)$ とする。 $x, y \in X$ に対し、

$$\begin{aligned} \partial(xy) &= pr_2 \circ f(xy) \\ &= pr_2(f(x)f(y)) \\ &= pr_2((f_1(x), f_2(x))(f_1(y), f_2(y))) \\ &= pr_2(f_1(x)f_1(y), f_1(x)f_2(y) + f_2(x)f_1(y)) \\ &= f_1(x)f_2(y) + f_2(x)f_1(y) \\ &= \varepsilon(x)\partial(y) + \partial(x)\varepsilon(y) \\ &= x \cdot \partial(y) + \partial(x) \cdot y \end{aligned}$$

よって、 $\partial \in \mathbf{Der}_R(X; M)$ である。

続いて全射を示す。 $\alpha \in \mathbf{Der}_R(X; M)$ に対し、

$$\beta = \varepsilon \oplus \alpha \in \mathbf{Hom}_{\mathbf{Alg}_R \downarrow A}(X, A \times M)$$

ただし、 $\varepsilon : X \longrightarrow A \in \mathbf{Alg}_R \downarrow A$ である。このとき、 β はきちんと $\mathbf{Alg}_R$ 上の morphism になる。簡単に確かめると、 ε, α ともに module の morphism なので、R-module としての morphism にはなっている。あとは積を保つのだが、 α が Leibniz rule を満たすことから満たされる。また明らかに、 $pr_2(\beta) = \alpha$ である。

単射は $f = \varepsilon \oplus \partial \in \mathbf{Hom}_{\mathbf{Alg}_R \downarrow A}(X, A \times M)$ を選んだ時点で ε は 1 つに決まっているため、簡単に示せる。

Corollary 0.1.8

$A \in \mathbf{Alg}_R$, $M \in \mathbf{Mod}_A$ に対し、 $A \times M \in (\mathbf{Alg}_R \downarrow A)_{ab}$

proof) $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}_R \downarrow A}(-, A \times M) \cong \mathbf{Der}_R(-; M)$ であり、 $\mathbf{Der}_R(-; M)$ は R -module なので、同型対応によって $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}_R \downarrow A}(-, A \times M)$ にも R -module の構造が入り、これは natural な abelian group と考えられる。

Theorem 0.1.9

$A \in \mathbf{Alg}_R$ に対し、

$$A \times - : \mathbf{Mod}_A \longrightarrow (\mathbf{Alg}_R \downarrow A)_{ab}$$

は equivalence of categories であり、さらに

$$A \times - : s\mathbf{Mod}_A \longrightarrow (s\mathbf{Alg}_R \downarrow A)_{ab}$$

も equivalence of categories である。ただし、 $s\mathbf{Alg}_R \downarrow A$ は A を constant functor として $s\mathbf{Alg}_R$ の object と見ている。

Definition 0.1.10

$X \in \mathbf{Alg}_R$ としたとき、 X の multiplication の Kernel を $I = \mathrm{Ker}(X \otimes_R X \longrightarrow X)$ という形で定義する。 $X \otimes_R X$ は R -algebra であるが、 I は $X \otimes_R X$ の部分環ではない。残念ながら単位元を含まない。しかし、それ以外の条件は満たす。よって I は $X \otimes_R X$ を R -module と見て、その sub module とみる。このとき、 $I^2 = \{xy \in I \mid x, y \in I\}$ の部分集合から生成される I の sub module とし、

$$\Omega_{X/R} = I/I^2$$

とおくとこれは R -module であるが、

$$X \times \Omega_{X/R} \longrightarrow \Omega_{X/R}$$

を $(x, [y \otimes z]) \mapsto [xy \otimes z]$ で定義すれば X -module となる。

Lemma 0.1.11

$$X \times \Omega_{X/R} \longrightarrow \Omega_{X/R}$$

において、 $x[y \otimes z] = [y \otimes xz]$

proof) $xy \otimes z - y \otimes xz = (y \otimes z)(x \otimes 1 - 1 \otimes x) \in I^2$ であるので、 $[xy \otimes z] = [y \otimes xz]$

Theorem 0.1.12

$$d : X \longrightarrow \Omega_{X/R}$$

を、 $d(x) = [x \otimes 1 - 1 \otimes x]$ により定義すると、

$$d^* : \text{Hom}_{\text{Mod}_X}(\Omega_{X/R}, M) \longrightarrow \text{Der}_R(X, M)$$

が定義され、これは同型である。

proof) まず well defined から示す。 $f \in \text{Hom}_{\text{Mod}_X}(\Omega_{X/R}, M)$ に対し、

$$\begin{aligned} f \circ d(x)y + xf \circ d(y) &= f([x \otimes 1 - 1 \otimes x])y + xf([y \otimes 1 - 1 \otimes y]) \\ &= f([xy \otimes 1 - y \otimes x]) + f([y \otimes x - 1 \otimes y]) \\ &= f([xy \otimes 1 - 1 \otimes xy]) \\ &= f \circ d(xy) \end{aligned}$$

なので $f \circ d \in \text{Der}_R(X, M)$ である。

続いて全射を示す。 $\alpha \in \text{Der}_R(X, M)$ に対し、

$$\beta \in \text{Hom}_{\text{Mod}_X}(\Omega_{X/R}, M)$$

を $\beta([x \otimes y]) = \alpha(x)y$ により定義する。

$$\beta(z[x \otimes y]) = \beta([xz \otimes y]) = \alpha(xz)y = (\alpha(x)z + x\alpha(z))y = \alpha(x)yz = z\beta([x \otimes y])$$

であり、和も保つので $\beta \in \text{Hom}_{\text{Mod}_X}(\Omega_{X/R}, M)$ である。このとき、

$$\beta \circ d(x) = \beta([x \otimes 1 - 1 \otimes x]) = \alpha(x)1 - \alpha(1)x$$

であるが、任意の $w \in X$ に対し $\alpha(w) = \alpha(1w) = \alpha(1)w + 1\alpha(w)$ であることから、 $\alpha(1)w = 0$ 。 w は任意であったので、 $\alpha(1) = 0$ となる。つまり、 $\beta \circ d = \alpha$ なので全射である。

最後に単射であるが、 $f, g \in \text{Hom}_{\text{Mod}_X}(\Omega_{X/R}, M)$ に対し、

$$f \circ d = g \circ d \in \text{Der}_R(X, M)$$

と仮定する。このとき、 $[x \otimes y] \in \Omega_{X/R}$ に対し、 $f \circ d(x) = g \circ d(x)$ であり、

$$f([x \otimes 1 - 1 \otimes x]) = g([x \otimes 1 - 1 \otimes x])$$

であるが両辺に y を作用させ、

$$yf([x \otimes 1 - 1 \otimes x]) = yg([x \otimes 1 - 1 \otimes x])$$

であり、 $xy = 0$ であるので、

$$f([x \otimes y]) = g([x \otimes y])$$

である。

Theorem 0.1.13

$A \in \text{Alg}_R$ 、 $M \in \text{Mod}_A$ に対し、

$$A \otimes \Omega_{-/R} : \text{Alg}_R \downarrow A \longrightarrow \text{Mod}_A$$

を、 $A \otimes \Omega_{-/R}(X) = A \otimes_X \Omega_{X/R}$ で定義する。ただし、 A は $X \in \text{Alg}_R \downarrow A$ より $X : X \rightarrow A$ と A の multiplication を用いて X -module と見ている。つまり、

$$X \times A \xrightarrow{X \times 1} A \times A \xrightarrow{\mu} A$$

の action を考えている。このとき、 $A \otimes_X \Omega_{X/R}$ は X -module であるが、

$$A \times (A \otimes_X \Omega_{X/R}) \longrightarrow A \otimes_X \Omega_{X/R}$$

を $(a, b \otimes x) \mapsto ab \otimes x$ で定義し、 $A \otimes_X \Omega_{X/R}$ を A -module と見る。このとき、

$$A \otimes \Omega_{-/R} : \text{Alg}_R \downarrow A \iff \text{Mod}_A : A \times -$$

proof) $X \in \text{Alg}_R \downarrow A$ 、 $M \in \text{Mod}_A$ に対し、

$$\text{Hom}_{\text{Alg}_R \downarrow A}(X, A \times M) \cong \text{Der}_R(X; M) \cong \text{Hom}_{\text{Mod}_A}(A \otimes_X \Omega_{X/R}, M)$$

である。

Corollary 0.1.14

Those functors extends level-wise for simplicial

$$A \otimes \Omega_{-/R} : s\mathbf{Alg}_R \downarrow A \iff s\mathbf{Mod}_A : A \times -$$

are Quillen functors.

Definition 0.1.15 *cotangent complex*

$A \in \mathbf{Alg}_R$ としたとき、 $A \in s\mathbf{Alg}_R \downarrow A$ とみなし、 QA を A の cofibrant replacement in $\mathbf{Alg}_R \downarrow A$ とする。このとき、

$$L_{A/R} = A \otimes_{QA} \Omega_{QA/R} \in s\mathbf{Mod}_A$$

で定義し、 A の cotangent complex と呼ぶ。このとき、

$$D_*(A/R) = \pi_*(L_{A/R}) = H_*(NL_{A/R})$$

と定義し、 A の Andre Quillen homology と呼ぶ。より一般に $M \in \mathbf{Mod}_A$ を係数とした Andre Quillen homology は、

$$D_*(A/R; M) = \pi_*(M \otimes_A L_{A/R})$$

と定義する。

Remmark 0.1.16

$D_{-/R} : \mathbf{Alg}_R \longrightarrow \mathbf{Ab}$ は、

$$\mathbf{Alg}_R \hookrightarrow \mathrm{Ho}(s\mathbf{Alg}_R) \xrightarrow{\mathbf{LAb}(_)} \mathrm{Ho}(s\mathbf{Mod}_) \xrightarrow{\pi_*} \mathbf{Ab}$$

ということである。